第41卷第3期 数 学 学 报 Vol.41, No. 3
1998年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA May, 1998

相对复盖与包络

丁南庆

(南京大学数学系 南京 210093)

陈建龙

(东南大学应用数学系 南京 210096)

摘 要 本文旨在给出相对复盖与包络的特征刻划. 作为应用，证明了：若 R 为任意环， $0 \to A \to B \to C \to 0$ 为左 R- 模正合列并且 A 与 C 都有平坦复盖，则 B 有平坦复盖.

关键词 复盖，包络，分解范畴
MR(1991) 主题分类 16D10, 16D40
中图分类 O153.3

Relative Covers and Envelopes

Ding Nanqing
(*Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing* 210093*, China*)
Chen Jianlong
(*Department of Applied Mathematics, Southeast University, Nanjing* 210096*, China*)

Abstract The purpose of this paper is to give characterizations of relative covers and envelopes. As an application, it is shown that for any ring R, if $0 \to A \to B \to C \to 0$ is an exact sequence of left R-modules, where both A and C have flat covers, then B has a flat cover.

Keywords Cover, Envelope, Resolving category
1991 MR Subject Classification 16D10, 16D40
Chinese Library Classification O153.3

0 引言

设 R 为环, M 为 R- 模. 众所周知: i) 若 $0 \to M \xrightarrow{\phi} E$ 正合并且 E 内射, 则 $\phi : M \to E$ 是内射包络当且仅当 $\operatorname{Im}\phi$ 是 E 的本质子模; ii) 若 $P \xrightarrow{\phi} M \to 0$ 正合并且 P 投射, 则 $\phi : P \to M$ 是投射复盖当且仅当 $\operatorname{Ker}\phi$ 是 P 的多余子模. 对于 R- 模类 $\mathcal{C}$, 许多作者已经对 $\mathcal{C}$- 复盖与 $\mathcal{C}$- 包络作了比较深入的研究 (参见文献 [1–13]). 一个自然的问题就是: 如果 $0 \to M \xrightarrow{\phi} E$ (或 $E \xrightarrow{\phi} M \to 0$) 正合并且 $E \in \mathcal{C}$, 何时 ϕ 为 $\mathcal{C}$- 包络 (或 $\mathcal{C}$- 复盖)? 本文主要讨论这个问题. 假设 $\mathcal{C}$ 在扩张下封闭, 文中证明了: (1) 若 $E \xrightarrow{\phi} M \to 0$ 正合, 其中 $E \in \mathcal{C}$ 并且 M 有 $\mathcal{C}$- 复盖, 则 $\phi : E \to M$ 是 $\mathcal{C}$- 复盖当且仅当 $\operatorname{Ker}\phi$ 是 $\mathcal{C}$- 内射模并且不包含 E 的任何非零直和项; (2) 若

收稿日期: 1997-07-04, 接受日期: 1997-12-02
国家自然科学基金 (19771046, 19701008) 及江苏省自然科学基金资助项目

$0 \to M \xrightarrow{\phi} F$ 正合, 其中 $F \in \mathcal{C}$ 并且 M 有 $\mathcal{C}$- 包络, 则 $\phi: M \to F$ 是 $\mathcal{C}$- 包络当且仅当 $\operatorname{Cok}\phi$ 是 $\mathcal{C}$- 投射模并且对于商同态 $\pi: F \to \operatorname{Cok}\phi$ 及任一满同态 $p: \operatorname{Cok}\phi \to N$, 若 $p\pi$ 可裂, 则 $N = 0$. 作为特殊情形，文中给出了投射复盖与内射包络的新刻划. 最后，对于左 R- 模范畴的一个分解子范畴 $\mathcal{C}$, 我们证明了：若有正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$, 其中 A 和 C 都有 $\mathcal{C}$- 复盖, 则 B 有 $\mathcal{C}$- 预复盖. 作为推论，我们得出：对于任意环 R, 如果 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 正合并且 A 和 C 都有平坦复盖, 则 B 亦然. 该推论改进了文献 [13] 中定理 2.3.

1 预备知识

为后文需要，本节介绍几个已知概念.

文中 R 指有单位元的结合环，所有模均指左酉模. R-Mod 表示左 R- 模范畴, $\mathcal{C}$ 表示 R-Mod 的一个子类.

(1) 复盖与包络. 设 M 是 R- 模. 若存在 $E \in \mathcal{C}$ 及同态 $\phi: E \to M$ 使得对任意 $E' \in \mathcal{C}$ 及任意同态 $f: E' \to M$, 存在同态 $g: E' \to E$ 满足 $\phi g = f$, 则称 $\phi: E \to M$ 为 M 的一个 $\mathcal{C}$- 预复盖. 若还要求满足 $\phi g = \phi$ 的同态 g 只能是 E 的自同构，则称 ϕ 是 M 的 $\mathcal{C}$- 复盖. $\mathcal{C}$-(预) 包络可对偶定义，参见文献 [1, 6]. 易见，$\mathcal{C}$- 复盖与 $\mathcal{C}$- 包络在同构的意义下是唯一的. 如果 $\mathcal{C}$ 是一些熟知的模类，比如说，$\mathcal{C}$ 是平坦模类，则 $\mathcal{C}$-(预) 复盖简称为平坦 (预) 复盖，类似地，$\mathcal{C}$-(预) 包络简称为平坦 (预) 包络.

(2) 分解范畴与上分解范畴. 设 $\mathcal{C}$ 为 R-Mod 的一个子范畴. 如果 $\mathcal{C}$ 满足：(a) 在扩张下封闭，即对任一正合列 $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$, 若 $C', C'' \in \mathcal{C}$, 亦有 $C \in \mathcal{C}$, (b) 关于满同态的核封闭，即对任一正合列 $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$, 若 $C, C'' \in \mathcal{C}$, 则 $C' \in \mathcal{C}$, (c) 包含所有投射模，则称 $\mathcal{C}$ 为分解范畴 (resolving category). 如果 R-Mod 的子范畴 $\mathcal{C}$ 满足：(a) 在扩张下封闭，(b) 关于单同态的上核封闭，即若 $0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ 正合且 $C', C \in \mathcal{C}$, 则 $C'' \in \mathcal{C}$, (c) 包含所有内射 R- 模，则称 $\mathcal{C}$ 为上分解范畴 (coresolving category), 参见文献 [1].

(3) 相对平坦性. 设 $\mathcal{T}$ 为 R-Mod 的子类并且 $0 \in \mathcal{T}$, M 为 R- 模. 若存在 M 的有限生成子模 M' 使得 $M/M' \in \mathcal{T}$, 则称 M 为 $\mathcal{T}$- 有限生成模. 若存在有限生成自由模 F 及 $\mathcal{T}$- 有限生成模 K 使得 $0 \to K \to F \to M \to 0$ 为正合列，则称 M 为 $\mathcal{T}$- 有限表现模. 若对任一 $\mathcal{T}$- 有限表现模 P 及任一同态 $f: P \to M$, f 可以通过一个有限生成自由模分解，即存在有限生成自由模 F 及同态 $g: P \to F$ 和 $h: F \to M$ 使得 $f = hg$, 则称 M 为 $\mathcal{T}$- 平坦模. 显然，当 $\mathcal{T} = \{0\}$ 时，M 是 $\mathcal{T}$- 平坦模当且仅当 M 是平坦模，详见文献 [4, 5].

2 主要结果

为了叙述主要结果，首先引进下述定义.

定义 设 $\mathcal{C}$ 为 R-Mod 的一个子类，M 为 R- 模. 如果对任何 $C \in \mathcal{C}$ 有 $\operatorname{Ext}_R^1(C, M) = 0$ ($\operatorname{Ext}_R^1(M, C) = 0$), 则称 M 为 $\mathcal{C}$- 内射模 ($\mathcal{C}$- 投射模).

现在来证明

定理 1 设 $\mathcal{C}$ 是 R-Mod 的一个子类并且在扩张下封闭. M 为 R- 模. 如果 $E \xrightarrow{\phi} M \to 0$ 正合，$E \in \mathcal{C}$ 并且 M 有 $\mathcal{C}$- 复盖，则 $\phi: E \to M$ 是 $\mathcal{C}$- 复盖当且仅当 $\operatorname{Ker}\phi$ 是 $\mathcal{C}$- 内射模并且不包含 E 的任何非零直和项.

证明 必要性. 由文献 [10] 命题 2(3) 知 $\operatorname{Ker}\phi$ 不是包含 E 的任何非零直和项. 下证 $\operatorname{Ker}\phi$

是 $\mathcal{C}$- 内射的.

设 S 是 R- 模 N 的子模并且 $N/S \in \mathcal{C}$. 只要证明任一同态 $f: S \to \operatorname{Ker}\phi$ 可以延拓为同态 $g: N \to \operatorname{Ker}\phi$. 令 $i: S \to N$ 和 $j: \operatorname{Ker}\phi \to E$ 为包含映射. 我们可以构造 $jf: S \to E$ 与 $i: S \to N$ 的推出 (pushout) 如下：令 $D = (E \oplus N)/K$, 其中

$$K = \{(jf(s), -i(s)) \mid s \in S\} = \{(f(s), -s) \mid s \in S\}.$$

定义 $\gamma: E \to D$ 和 $\delta: N \to D$ 为：

$$\gamma(x) = (x, 0) + K, \quad \forall x \in E,$$
$$\delta(n) = (0, n) + K, \quad \forall n \in N.$$

则 D 为 jf 与 i 的推出，因此有如下行正合可换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "jf"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & N/S \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\gamma"] & D \arrow[r] & N/S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 1

因为 E 和 N/S 在 $\mathcal{C}$ 中，所以由假设知 D 亦在 $\mathcal{C}$ 中. 现在定义 $\psi: D \to M$ 如下：

$$\psi((x, n) + K) = \phi(x), \quad \forall (x, n) \in E \oplus N.$$

若 $(x, n) \in K$, 则存在 $s \in S$ 使得

$$(x, n) = (f(s), -s).$$

因此 $x = f(s)$, 从而 $\phi(x) = \phi f(s) = 0$. 这就是说 ψ 是完全确定的，而且

$$\psi\gamma(x) = \psi((x, 0) + K) = \phi(x), \quad \forall x \in E,$$

即 $\psi\gamma = \phi$. 但是， $\phi: E \to M$ 是 $\mathcal{C}$- 复盖，所以存在 $\xi: D \to E$ 使得 $\phi\xi = \psi$. 于是 $\phi = \phi(\xi\gamma)$, 从而 $\xi\gamma$ 是同构. 设 h 是 $\xi\gamma$ 的逆，则

$$h\xi\gamma = \xi\gamma h = 1_E.$$

因此

$$x = h\xi\gamma(x) = h\xi((x, 0) + K), \quad \forall x \in E$$

并且

$$\phi(h\xi\delta)(n) = \phi(\xi\gamma)(h\xi\delta)(n) = \phi\xi\delta(n) = \psi\delta(n) = \psi((0, n) + K) = \phi(0) = 0, \quad \forall n \in N.$$

所以 $\operatorname{Im}(h\xi\delta) \subseteq \operatorname{Ker}\phi$. 现在定义 $g: N \to \operatorname{Ker}\phi$ 为：

$$g(n) = h\xi\delta(n), \quad \forall n \in N.$$

则

$$gi(s) = g(s) = h\xi\delta(s) = h\xi((0, s) + K) = h\xi((f(s), 0) + K) = f(s), \quad \forall s \in S,$$

即 $f = gi$. 由此可见 $\operatorname{Ker}\phi$ 是 $\mathcal{C}$- 内射的.

充分性. 因为 $\operatorname{Ker}\phi$ 是 $\mathcal{C}$- 内射的并且有正合列 $0 \to \operatorname{Ker}\phi \to E \to M \to 0$, 所以，对任何 $E' \in \mathcal{C}$, 有正合列 $\operatorname{Hom}(E', E) \to \operatorname{Hom}(E', M) \to 0$. 因此， $\phi : E \to M$ 是一个 $\mathcal{C}$- 预复盖. 由假设， M 有 $\mathcal{C}$- 复盖 $\psi : E' \to M$. 于是存在 $f : E \to E'$ 和 $g : E' \to E$ 使得 $\phi = \psi f$ 且 $\psi = \phi g$. 因此 $\psi = \psi(fg)$, 从而 fg 是同构. 所以 $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$. 注意到 $\phi = \psi f$, 从而 $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker}\phi$. 由假设知 $\operatorname{Ker} f = 0$. 所以， $f : E \to E'$ 是同构，从而 $\phi : E \to M$ 是 $\mathcal{C}$- 复盖.

下述推论给出了在完全环上投射复盖的新刻划.

推论 1 设 R 为左完全环， $P \xrightarrow{\phi} M \to 0$ 正合并且 P 投射，则 $\phi : P \to M$ 为投射复盖当且仅当 $\operatorname{Ker}\phi$ 不包含 P 的非零直和项.

定理 2 设 $\mathcal{C}$ 是 R-Mod 的一个子类并且在扩张下封闭. M 为 R- 模. 如果 $0 \to M \xrightarrow{\phi} F$ 正合， $F \in \mathcal{C}$ 并且 M 有 $\mathcal{C}$- 包络，则下列陈述等价

(1) $\phi : M \to F$ 是 $\mathcal{C}$- 包络;

(2) $\operatorname{Cok}\phi$ 是 $\mathcal{C}$- 投射模，并且对于商同态 $\pi : F \to \operatorname{Cok}\phi$ 及任一满同态 $p : \operatorname{Cok}\phi \to N$, 如果 $p\pi$ 可裂，则 $N = 0$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 首先证明 $\operatorname{Cok}\phi$ 是 $\mathcal{C}$- 投射的. 设 $q : B \to C$ 为满同态使得 $A = \operatorname{Ker} q \in \mathcal{C}$. 只要证对任一同态 $f : \operatorname{Cok}\phi \to C$, 存在 $g : \operatorname{Cok}\phi \to B$ 使得 $f = qg$. 为此，我们构造 $p_1 = f\pi$ 与 q 的拉回 (pullback) 如下：令

$$D = \{(x, b) \in F \oplus B \mid p_1(x) = q(b)\}.$$

定义 $\gamma : D \to F$ 和 $\delta : D \to B$ 使得:

$$\gamma(x, b) = x, \quad \forall (x, b) \in D,$$
$$\delta(x, b) = b, \quad \forall (x, b) \in D,$$

则 D 为 p_1 与 q 的拉回. 于是有如下行正合可换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \to & D & \xrightarrow{\gamma} & F & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \\
0 & \to & A & \to & B & \xrightarrow{q} & C & \to & 0
\end{array}$$

图 2

因为 $A, F \in \mathcal{C}$, 所以 $D \in \mathcal{C}$. 对于任意的 $x \in M$, 因为 $p_1(\phi(x)) = f\pi\phi(x) = 0 = q(0)$, 所以 $(\phi(x), 0) \in D$. 定义 $\psi : M \to D$ 使得

$$\psi(x) = (\phi(x), 0), \quad \forall x \in M.$$

易见， $\phi = \gamma\psi$. 因为 $\phi : M \to F$ 是 $\mathcal{C}$- 包络，所以存在 $\xi : F \to D$ 使得 $\xi\phi = \psi$. 于是, $\phi = (\gamma\xi)\phi$, 从而 $\gamma\xi$ 是同构. 现定义 $g : \operatorname{Cok}\phi \to B$ 如下:

$$g(y + \operatorname{Im}\phi) = \delta\xi(\gamma\xi)^{-1}(y), \quad \forall y \in F.$$

如果， $y + \operatorname{Im}\phi = 0$, 则存在 $z \in M$ 使得 $y = \phi(z)$. 因此 $\psi(z) = (\phi(z), 0) = (y, 0)$. 所以,

$$\delta\xi(\gamma\xi)^{-1}(y) = \delta\xi(\gamma\xi)^{-1}\phi(z) = \delta\xi\phi(z) = \delta\psi(z) = \delta(y, 0) = 0.$$

这表明 g 是完全确定的，而且

$$qg(y + \operatorname{Im}\phi) = q\delta\xi(\gamma\xi)^{-1}(y) = p_1\gamma\xi(\gamma\xi)^{-1}(y)$$

$$= p_1(y) = f\pi(y) = f(y + \mathrm{Im}\,\phi), \quad \forall y \in F,$$

即 $f = qg$. 所以， $\mathrm{Cok}\,\phi$ 是 $\mathcal{C}$- 投射模.

因为 $p\pi : F \to N$ 可裂，所以存在 $i : N \to F$ 使得 $(p\pi)i = 1_N$, 从而 $F = \mathrm{Ker}\,(p\pi) \oplus i(N)$. 于是，对每个 $x \in M$, 有

$$\phi(x) = y + i(n), \text{ 其中 } y \in \mathrm{Ker}\,(p\pi), \quad n \in N.$$

从而

$$0 = p\pi\phi(x) = p\pi(y + i(n)) = (p\pi)i(n) = n,$$

故 $\phi(x) = y \in \mathrm{Ker}\,(p\pi)$. 设 $p_2 : F \to \mathrm{Ker}\,(p\pi)$ 为投射， $\lambda : \mathrm{Ker}\,(p\pi) \to F$ 为嵌入，则

$$\lambda p_2\phi(x) = \lambda p_2(y) = \lambda(y) = y = \phi(x), \quad \forall x \in M,$$

即 $\lambda p_2\phi = \phi$. 由于 ϕ 是 $\mathcal{C}$- 包络，所以 λp_2 是同构，从而 $N = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). 因为 $\mathrm{Cok}\,\phi$ 是 $\mathcal{C}$- 投射的，所以 $\phi : M \to F$ 是 $\mathcal{C}$- 预包络. 由假设， M 有 $\mathcal{C}$- 包络 $\psi : M \to Q$. 于是存在 $g : F \to Q$ 及 $h : Q \to F$ 使得 $\psi = g\phi$ 并且 $\phi = h\psi$. 因此 $\psi = (gh)\psi$, 从而 gh 是同构. 现定义 $p : \mathrm{Cok}\,\phi \to \mathrm{Ker}\,g$ 使得

$$p(y + \mathrm{Im}\,\phi) = y - h(gh)^{-1}g(y), \quad \forall y \in F.$$

若 $y \in \mathrm{Im}\,\phi$, 则存在 $z \in M$ 使得 $y = \phi(z)$, 从而

$$h(gh)^{-1}g(y) = h(gh)^{-1}g\phi(z) = h(gh)^{-1}\psi(z) = h\psi(z) = \phi(z) = y.$$

这表明 p 是完全确定的. 若 $x \in \mathrm{Ker}\,g$, 则 $g(x) = 0$, 从而 $p(x + \mathrm{Im}\,\phi) = x$, 故 p 是满同态. 设 $i : \mathrm{Ker}\,g \to F$ 为包含映射，则

$$(p\pi)i(x) = p\pi(x) = p(x + \mathrm{Im}\,\phi) = x, \quad \forall x \in \mathrm{Ker}\,g,$$

即 $(p\pi)i = 1_{\mathrm{Ker}\,g}$. 由 (2) 知 $\mathrm{Ker}\,g = 0$, 故 g 为单同态. 于是 g 为同构，从而 $\phi : M \to F$ 是 $\mathcal{C}$- 包络.

在定理 2 中令 $\mathcal{C}$ 为内射模类，则有下述关于内射包络的新刻划.

推论 2 设 F 为内射模并且 $0 \to M \xrightarrow{\phi} F$ 正合，则下列陈述等价:

(1) $\phi : M \to F$ 是内射包络.

(2) 对于商同态 $\pi : F \to \mathrm{Cok}\,\phi$ 及任一满同态 $p : \mathrm{Cok}\,\phi \to N$, 若 $p\pi$ 可裂，则 $N = 0$.

下面的引理是显然的，我们略去其证明.

引理 1 设 $\mathcal{C}$ 为 R-Mod 的一个分解子范畴， D 为 R- 模. 若 $\mathrm{Ext}\,^1_R(C, D) = 0, \forall C \in \mathcal{C}$, 则 $\mathrm{Ext}\,^n_R(C, D) = 0, \forall C \in \mathcal{C}$ 及 $n \geq 1$.

定理 3 设 R 为任意环， $\mathcal{C}$ 为 R-Mod 的一个分解子范畴. 若 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 正合，其中 A 和 C 都有 $\mathcal{C}$- 复盖，则 B 有 $\mathcal{C}$- 预复盖.

证明 因为 $\mathcal{C}$ 包含所有投射模，所以每个 $\mathcal{C}$-(预) 复盖是满同态. 设 $f_1 : C_1 \to A$ 及 $f_3 : C_3 \to C$ 为 $\mathcal{C}$- 复盖，则由

$$\begin{array}{ccc} & & C_3 \\ & & \downarrow f_3 \\ B & \to & C \end{array}$$

的拉回图得如下正合可换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & D \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

图 3

由定理 1 知， $\mathrm{Ker}\,(f_1)$ 是 $\mathcal{C}$- 内射的，即

$$\mathrm{Ext}\,_R^1(C, \mathrm{Ker}\,(f_1)) = 0, \quad \forall C \in \mathcal{C},$$

故由引理 1 知,

$$\mathrm{Ext}\,_R^2(C, \mathrm{Ker}\,(f_1)) = 0, \quad \forall C \in \mathcal{C}.$$

于是同态 $f_1 : C_1 \to A$ 诱导了同构 $\mathrm{Ext}\,_R^1(C_3, C_1) \cong \mathrm{Ext}\,_R^1(C_3, A)$. 因此由文献 [14] 引理 7.18 及定理 7.19 知存在如下正合可换图

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & \mathrm{Ker}\,(f_1) \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

图 4

由此产生正合可换图

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,(f_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\,(f_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\,(f_3) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & C_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

图 5

因为 $\mathcal{C}$ 在扩张下封闭，所以 $C_2 \in \mathcal{C}$. 易见， $\mathrm{Ker}\,(f_2)$ 是 $\mathcal{C}$- 内射的. 故 $f_2 : C_2 \to B$ 是 B 的 $\mathcal{C}$- 预复盖.

作为应用，取 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{T}$- 平坦模类，则有

引理 2 设 $\mathcal{T}$ 为 R-Mod 的子类且 $0 \in \mathcal{T}$. 如果 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{T}$- 平坦 R- 模类，则 $\mathcal{C}$ 是 R-Mod 的分解子范畴.

证明 易见，只需证明 $\mathcal{C}$ 在扩张下封闭.

设 $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ 正合并且 M', M'' 都是 $\mathcal{T}$- 平坦模. 下证 M 是 $\mathcal{T}$- 平坦模. 对每个 $\mathcal{T}$- 有限表现 R- 模 P 及任一同态 $f : P \to M$, 则 $\beta f \in \mathrm{Hom}_R(P, M'')$. 由于 M'' 是 $\mathcal{T}$- 平坦的，故存在有限生成自由模 F'' 及同态 $g'' : P \to F''$ 和 $h'' : F'' \to M''$ 使得 $\beta f = h''g''$. 因为 F'' 是投射的，所以存在 $\phi : F'' \to M$ 使得 $\beta\phi = h''$. 因此

$$\beta(f - \phi g'') = \beta f - \beta\phi g'' = \beta f - h''g'' = 0,$$

即 $\mathrm{Im}\,(f - \phi g'') \subseteq \mathrm{Ker}\,\beta = \mathrm{Im}\,\alpha$. 故, 对每个 $x \in P$, 存在唯一的 $y \in M'$ 使得 $(f - \phi g'')(x) = \alpha(y)$, 从而可定义同态 $\psi : P \to M'$ 使 $\psi(x) = y$. 因为 M' 是 $\mathcal{T}$- 平坦的，故存在有限生成自由模 F' 及同态 $g' : P \to F'$ 和 $h' : F' \to M'$ 使得 $\psi = h'g'$. 因此

$$\alpha h'g'(x) = \alpha\psi(x) = \alpha(y) = (f - \phi g'')(x), \quad \forall x \in P,$$

即 $f = \alpha h'g' + \phi g''$. 定义 $g : P \to F' \oplus F''$ 和 $h : F' \oplus F'' \to M$ 如下：

$$g(x) = (g'(x), g''(x)), \quad \forall x \in P,$$
$$h(u, v) = \alpha h'(u) + \phi(v), \quad \forall (u, v) \in F' \oplus F''.$$

易见 $f = hg$, 从而 M 是 $\mathcal{T}$- 平坦的.

由定理 3 及引理 2 得

推论 3 设 $\mathcal{T}$ 为 R-Mod 的一个子类且 $0 \in \mathcal{T}$. 如果 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 正合且 A, C 都有 $\mathcal{T}$- 平坦复盖，则 B 有 $\mathcal{T}$- 平坦预复盖.

由文献 [6] 定理 3.1 知，若一个 R- 模有平坦预复盖，则该模有平坦复盖. 因此，在推论 3 中令 $\mathcal{T} = \{0\}$ 得

推论 4 设 R 为任意环并且 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 正合. 如果 A 和 C 有平坦复盖，则 B 亦然.

注 该推论去掉了文献 [13] 定理 2.3 中凝聚性的假设.

对偶地，我们可以证明

定理 4 设 R 为任意环， $\mathcal{C}$ 为 R-Mod 的一个上分解子范畴. 若 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 正合，其中 A 和 C 都有 $\mathcal{C}$- 包络，则 B 有 $\mathcal{C}$- 预包络.

参 考 文 献

1 Auslander M, Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories. Adv Math, 1991, 86: 111–152
2 Belshoff R, Enochs E E, Xu J. The existence of flat covers. Proc Amer Math Soc, 1994, 122: 985–991
3 Chen Jianlong. P-projective modules. Comm Algebra, 1996, 24(3): 821–831
4 Chen Jianlong, Ding Nanqing. A note on existence of envelopes and covers. Bull Austral Math Soc, 1996, 54: 383–390
5 Ding Nanqing, Chen Jianlong. Relative coherence and preenvelopes. Manuscripta Math, 1993, 81: 243–262

6 Enochs E E. Injective and flat covers, envelopes and resolvents. Israel J Math, 1981, 39: 189–209
7 Enochs E E. Flat covers and flat cotorsion modules. Proc Amer Math Soc, 1984, 92(2): 179–184
8 Enochs E E. Covers by flat modules and submodules of flat modules. J Pure Appl Algebra, 1989, 57: 33–38
9 Enochs E E, Jenda O. Copure injective modules. Questiones Math, 1991, 14: 401–409
10 García Rozas J R, Torrecillas B. Relative injective covers. Comm Algebra, 1994, 22(8): 2925–2940
11 Gómez J, Torrecillas B. Torsionfree covers by submodules of flat modules. Comm Algebra, 1991, 19(3): 803–827
12 Torrecillas B. T-torsionfree T-injective covers. Comm Algebra, 1984, 12(21): 2707–2726
13 Xu J. The existence of flat covers over Noetherian rings of finite Krull dimension. Proc Amer Math Soc, 1995, 123(1): 27–32
14 Rotman J J. An Introduction to Homological Algebra. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1979